КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНИЙ ДИЗАЙН

УДК 519.859+514.1

Л. Г. ЕВСЕЕВА

ПОСТРОЕНИЕ АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТРЕХМЕРНОМ ИНТЕРВАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проведены исследования выполнимости аксиом евклидовой геометрии в трехмерном интервальном пространстве на основе введенных понятий, операций в интервальных пространствах, свойствах интервальных отображений. Результаты исследования могут быть использованы как средства математического моделирования геометрических объектов и их взаимодействий с учетом погрешностей исходных данных.

Ключевые слова: интервальная геометрия, аксиомы евклидовой геометрии, интервальная псевдопрямая, интервальная псевдопрямая, интервальное движение.

Введение. Теория геометрического проектирования [1] охватывает широкий круг фундаментальных и прикладных задач, связанных с математическим моделированием процесса размещения реальных объектов и созданием эффективных методов оптимизации этого процесса. При решении задач данного класса, как правило, используются идеализированные математические модели материальных объектов и их взаимодействий, когда погрешности задания исходных данных не учитываются. А так как речь идет об оптимизационных задачах, возникает проблема устойчивости, точности и достоверности получаемых результатов.

В силу сложности математических моделей задач геометрического проектирования, в дальнейшем, возникла необходимость привлечения к ее решению активно развивающегося с начала 60-х годов перспективного направления вычислительной математики интервального анализа [2 – 9], основная идея которого чрезвычайно проста: вещественное число представляется не одним, а двумя числами – оценкой снизу и оценкой сверху, образующими интервальное число. Таким образом, интервальный анализ дает возможность автоматически учитывать погрешности при задании исходных данных и погрешности, вызываемые округлениями.

Первой монографией по интервальному анализу считается вышедшая в 1966 году книга Мура [2]. На данный момент построены и используются интервальные арифметики, а именно: арифметика Мура [2], арифметика Каухера [3], «расширенная интервальная арифметика» Маркова [4], интервальная арифметика Кахана, допускающая действия с бесконечными интервалами и получившая дальнейшее развитие в работе [5], сегментная арифметика Сендова [6], арифметика Ортольфа [7], модифицированная интервальная арифметика [8], интервальная арифметика на случай комплексных чисел [9]. С современными исследованиями в области интервального анализа можно ознакомиться, например, в работах [10,11].

Что касается задач геометрического проектирования, то для учета погрешностей исходных данных (погрешностей метрических характеристик и параметров размещения) методы интервального анализа, к сожалению, не могут быть применены непосредственно в силу сложности соответствующих математических моделей.

Для осуществления единого подхода к разрешению проблемы учета погрешностей при решении указанного класса задач в 1992 году на основе двух параллельно развивающихся научных направлений – геометрического проектирования и интервального анализа Стояном Ю.Г. предложено новое приложение интервального анализа в геометрическом проектировании: интервальная геометрия [12 – 14], которое получило широкое применение при моделировании и решении широкого класса прикладных задач.

Для построения математических моделей материальных объектов и их взаимодействий в классе задач геометрического проектирования используются методы евклидовой геометрии.

Цель работы. Целью работы является проверка выполнимости аксиом евклидовой геометрии в трехмерном интервальном пространстве как дальнейшее развитие теории интервальной геометрии в геометрическом проектировании и использование положений и методов евклидовой геометрии для разработки конструктивных средств математического моделирования и эффективных методов решения оптимизационных задач размещения в интервальных пространствах.

Обсуждение результатов. Рассмотрим интервальное пространство

$$\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

где $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – расширенное пространство центрированных интервалов,

$$U = (\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle Z\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R},$$

$$\langle X\rangle = \langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ \langle Y\rangle = \langle y, \nu_y\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\langle Z\rangle = \langle z, \nu_z\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}.$$

В пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ определена метрика [12] и арифметические операции.

В работах [15, 16] введены такие понятия интервальной геометрии как интервальная квазилинейная поверхность, интервальная псевдоплоскость, а также интервальная ломаная, интервальная псевдопрямая, интервальная прямая

Аксиомы связи

Пусть имеется произвольная тройка точек

$$U_i = (\langle X_i\rangle, \langle Y_i\rangle, \langle Z_i\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, i \in J_3 = \{1,2,3\}, \quad (1)$$

$\langle X_i\rangle = \langle x_i, \nu_{x_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Y_i\rangle = \langle y_i, \nu_{y_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Z_i\rangle = \langle z_i, \nu_{z_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_3$, (2)

таких, что $U_1 \neq U_2$ согласно определению равных точек пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [12] и, кроме того, интервальные координаты (2) этих точек удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &|x_1 - x_2| > h_1 \cdot \max\{|\nu_{x_1}|, |\nu_{x_2}|\}, \\ &|y_1 - y_2| > h_2 \cdot \max\{|\nu_{y_1}|, |\nu_{y_2}|\}, \\ &|z_1 - z_2| > h_3 \cdot \max\{|\nu_{z_1}|, |\nu_{z_2}|\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $1 < h_1, h_2, h_3 \le 6$.

Тогда через точки U_1, U_2, U_3 проходят интервальные псевдоплоскости $\tilde{\mathbf{\Pi}}_1$, $\tilde{\mathbf{\Pi}}_2$ и $\tilde{\mathbf{\Pi}}_3$, которые определяются своими интервальными уравнениями [15, 16] соответственно

$$\begin{aligned} &\langle A\rangle * \langle X\rangle + \varphi(b\cdot\langle Y\rangle) + \varphi(c\cdot\langle Z\rangle) + \langle D\rangle = \mathbf{0}, \\ &\varphi(a\cdot\langle X\rangle) + \langle B\rangle * \langle Y\rangle + \varphi(c\cdot\langle Z\rangle) + \langle D\rangle = \mathbf{0}, \\ &\varphi(a\cdot\langle X\rangle) + \varphi(b\cdot\langle Y\rangle) + \langle C\rangle * \langle Z\rangle + \langle D\rangle = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\varphi(\lambda\cdot\langle X\rangle) = \begin{cases} \lambda\cdot\langle X\rangle, & \text{если } \lambda \ge 0 \\ \lambda\cdot\overline{\langle X\rangle}, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$\lambda \in R^1$, $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{0} = \langle 0,0\rangle$, $\langle A\rangle = \langle a, \nu_a\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle B\rangle = \langle b, \nu_b\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle C\rangle = \langle c, \nu_c\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ $\langle D_i\rangle = \langle d_i, \nu_{d_i}\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i = 1,2,3$, $a,b,c,d \in R$, $\overline{\langle X\rangle} = \overline{\langle x, \nu_x\rangle} = \langle x, -\nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – сопряжение [12] элемента $\langle X\rangle = \langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, символом (*) обозначена операция интервального умножения в расширенном пространстве центрированных интервалов $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [12].

Пусть компоненты $\nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \nu_{x_3}, \nu_{y_1}, \nu_{y_2}, \nu_{y_3}$ координат точек $U_1, U_2, U_3 \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, удовлетворяющих неравенствам (3), таковы, что выполняются равенства

$$\nu_{x_1} = \nu_{x_2}, \nu_{y_1} = \nu_{y_2}, \nu_{z_1} = \nu_{z_2}. \quad (6)$$

Тогда через эти точки проходит интервальная гиперплоскость [15] $\mathbf{\Pi} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, которая определяется интервальным уравнением

$$\varphi(a\cdot\langle X\rangle) + \varphi(b\cdot\langle Y\rangle) + \varphi(c\cdot\langle Z\rangle) + \langle D\rangle = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Здесь $a,b,c \in R$, $U = (\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle Z\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\langle D\rangle = \langle d, \nu_d\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\varphi(\lambda\cdot\langle U\rangle)$ определяется выражением (5).

На основании разбиения пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ [15]:

$$\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{N} \mathbf{\Omega}_k, \ \mathbf{\Omega}_k = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2 \times \mathbf{J}_3,$$

где $N = 4^3$, $\mathbf{J}_i = \{\mathbf{I}_{s_1}, \mathbf{I}_{s_2}, \mathbf{I}_{s_3}^+, \mathbf{I}_{s_3}^-\}$, $i \in J_n$,

$$\mathbf{I}_{s_1} = \operatorname{int} \mathbf{I}_{s_1} = \{\langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid x - |\nu_x| > 0\},$$

$$\mathbf{I}_{s_2} = \operatorname{int} \mathbf{I}_{s_2} = \{\langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid x + |\nu_x| < 0\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3} = cl\, \mathbf{I}_{s_3} = \{\langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid (x - |\nu_x| \le 0) \wedge (x + |\nu_x| \ge 0)\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3}^+ = \{\langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_{s_3} \mid \nu_x \ge 0\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3}^- = \{\langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_{s_3} \mid \nu_x < 0\},$$

$$\mathbf{I}_{s_3} = \mathbf{I}_{s_3}^+ \cup \mathbf{I}_{s_3}^-, \ \mathbf{I}_s\mathbf{R} = \mathbf{I}_{s_1} \cup \mathbf{I}_{s_2} \cup \mathbf{I}_{s_3},$$

можно сделать вывод, что на каждом из интервальных множеств $\mathbf{\Omega}_k \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\forall k \in J_N$, функция $\mathbf{F}(U) = \langle A\rangle * \langle X\rangle + \langle B\rangle * \langle Y\rangle + \langle C\rangle * \langle Z\rangle$, участвующая в уравнении интервальной квазиповерхности [17], линейна, поэтому интервальную гиперповерхность, заданную уравнением (7), назовем линейной гиперповерхностью, а каждое из множеств $\mathbf{\Omega}_k$ областью линейности.

Исходя из определения операции интервального умножения [12] $\langle A\rangle * \langle X\rangle$ элемента $\langle X\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ на интервальное число $\langle A\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, заключаем, что вид уравнения (7) зависит от выбора множества $\mathbf{\Omega}_k$ и от того, какие значения принимают интервальные коэффициенты $\langle A_i\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\forall i \in J_3$.

Аксиомы порядка в трехмерном интервальной пространстве сформулированы в работе [18]. Однако, нужно исследовать множество точек выполнимости евклидовых аксиом в интервальном пространстве. Так, аксиома 1 выполняется не для любой пары точек пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, а только для некоторого их подмножества $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и такого, что его точки удовлетворяют требованию (3).

Возьмем три точки $\langle U_i\rangle \in \mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i \in J_3 = \{1,2,3\}$. Тогда, через эти точки проходит не более чем три интервальные псевдоплоскости, которые определяются равенствами вида (4) .

Этот факт можно показать и несколько иначе, воспользовавшись следующим конструктивным доказательством.

Для этого рассмотрим образ интервальной прямой $\mathbf{L}$ в пространстве R^6 в результате отображения $\mathbf{H}$ [13], которая задает некоторое линейное многообразие в пространстве R^6.

Из соотношения (7) следует, что образ интервальной гиперплоскости в пространстве R^6 определяется системой уравнений

$$\begin{cases} a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z + d = 0 \\ a\cdot\nu_x + b\cdot\nu_y + c\cdot\nu_z + \nu_d = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Напомним, что интервальное отображение

$$\mathbf{H}(U_i) = (x_i, \nu_{x_i}, y_i, \nu_{y_i}, z_i, \nu_{z_i}) \in R^6, i \in J_3.$$

Очевидно, что первое уравнение в системе (8) определяет некоторую плоскость в подпространстве

$R^3_{xyz} \subset R^6$, а второе уравнение в этой же системе определяет некоторую плоскость в подпространстве $R^3_{v_x v_y v_z} \subset R^6$.

Кроме того, ясно, что $R^6 = R^3_{xyz} \times R^3_{v_x v_y v_z}$. Эти обстоятельства, а также условие построения интервальной гиперплоскости через три данные точки [15] позволяют определить однозначно коэффициенты a, b и c, воспользовавшись известными в аналитической геометрии уравнением плоскости, проходящей через три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

Теперь предположим, что через точки $(x_1, v_{x_1}, y_1, v_{y_1}, z_1, v_{z_1})$ и $(x_2, v_{x_2}, y_2, v_{y_2}, z_2, v_{z_2})$ проходит два линейных многообразия, уравнения которых можно представить как две системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot y + d_2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$
$$\begin{cases} a_1 \cdot v_x + b_1 \cdot v_y + c_1 \cdot v_z + v_{d_1} = 0 \\ a_2 \cdot v_x + b_2 \cdot v_y + c_2 \cdot v_z + v_{d_2} = 0. \end{cases}$$

Так как каждая из этих систем по предположению имеет более одного решения, то уравнения, входящие в эти системы, зависимы, т.е. отличаются только множителем. А это значит, что линейные многообразия совпадают, т.е. через точки $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$ проходит единственное линейное многообразие, определяемое системой уравнений (9).

Следовательно, через точки $\langle U_i \rangle \in \mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i \in J_3 = \{1,2,3\}$ проходит единственная интервальная гиперплоскость в трехмерном интервальном пространстве.

Аксиома 3. На каждой прямой лежат, по крайней мере, две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Нетрудно непосредственной проверкой показать, что три точки $(\langle 0,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle)$ $(\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle)$, $(\langle 1,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle)$ не лежат ни на какой интервальной псевдопрямой.

Аналогичным образом можно построить точку, лежащую на интервальной прямой $\mathbf{L}$, если коэффициенты a и b имеют другие знаки.

Нетрудно убедиться, что три точки $(\langle 0,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle)$ $(\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle)$, $(\langle 1,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle)$ не лежат ни на какой интервальной прямой $\mathbf{L}$.

Пусть $\langle U_1 \rangle, \langle U_2 \rangle \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, есть две точки на интервальной псевдопрямой $\mathbf{L}$, заданной уравнением [16].

Определение 1. Часть интервальной псевдопрямой $\mathbf{L}$, все точки которой лежат между точками $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$, называется интервальным псевдоотрезком, а точки $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$ называются концами интервального псевдоотрезка $\langle U_1 \rangle \langle U_2 \rangle$.

Определение 2. Если точки $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$ являются точками интервальной прямой $\mathbf{L}$, то часть интервальной прямой $\mathbf{L}$, лежащая между точками $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$, называется интервальным отрезком, а точки $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$ – концами интервального отрезка $\langle U_1 \rangle \langle U_2 \rangle$.

Поскольку интервальная гиперплоскость является частным случаем интервальной псевдоплоскости, то интервальная гиперплоскость также разбивает пространство $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ на две части $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, которые определяются соответствующими неравенствами.

Определение 3. Множества $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ называются интервальными псевдополуплоскостями пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, и в случае интервальной прямой множества $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ называются интервальными полуплоскостями пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Аксиомы связи

Таким образом, справедливы следующие выражения:

1. Какими бы ни были две точки $U_1 \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ і $U_2 \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, существует прямая $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, проходящая через точку U_1 и через точку U_2.

Пусть имеется произвольная пара точек $U_1 = (\langle X_1 \rangle, \langle Y_1 \rangle, \langle Z_1 \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ и $U_2 = (\langle X_2 \rangle, \langle Y_2 \rangle, \langle Z_1 \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\langle X_i \rangle = \langle x_i, v_{x_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Y_i \rangle = \langle y_i, v_{y_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\langle Z_i \rangle = \langle z_i, v_{z_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i = 1,2$, и таких, что $\langle U_1 \rangle \neq \langle U_2 \rangle$ согласно определению равных точек пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

2. На каждой прямой $\mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ лежат, по крайней мере, две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

3. Какими бы ни были три точки $U_i \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, i \in J_3$, существует не более одной интервальной гиперплоскости, проходящей через эти точки.

Аксиомы порядка

Аксиома 1. Если $U_1 < U_2$, $U_i \in \mathbf{L} \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, i = 1,2$, в одном направлении, то $U_2 < U_1$ в противоположном направлении.

Таким образом, на интервальной прямой задано направление, которое соответствует непрерывному изменению интервального параметра.

Если интервальная прямая [16], задана уравнениями

$$\begin{cases} \langle X \rangle = \langle X_0 \rangle + \langle A \rangle * \langle T \rangle \\ \langle Y \rangle = \langle Y_0 \rangle + \langle B \rangle * \langle T \rangle \\ \langle Z \rangle = \langle Z_0 \rangle + \langle C \rangle * \langle T \rangle, \end{cases} \tag{10}$$

где $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – координаты интервального направленного множества [17], $\langle T \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – интервальный параметр прямой, на $\mathbf{L}$ есть два взаимно противоположных направления и в каждом из них любая пара точек $U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in \mathbf{L}, i = 1,2$, находится в заданном отношении, которое выражается словом «предшествовать» и обозначается "$<_{\mathbf{L}}$". При этом направление на $\mathbf{L}$ соответствует непрерывному изменению интервального параметра в соотношениях (10).

Аксиома 2. В одном з двух направлений, если $U_1 < U_2$, а $U_2 < U_3$, то $U_1 < U_3$.

Аксиома 3. В одном из двух направлений для каждой точки U_2 найдутся точки U_1 и U_3 такие, что $U_1 <_{\mathbf{L}} U_2 <_{\mathbf{L}} U_3$.

Аксиома 4. Интервальная гиперплоскость в пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, которая задается интервальным уравнением $\mathbf{F}(U) = \mathbf{0}$,

где $\mathbf{F}(U) = \varphi(a \cdot \langle X \rangle) + \varphi(b \cdot \langle Y \rangle) + \varphi(c \cdot \langle Z \rangle) + \langle D \rangle$, $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$, разбивает все трехмерное интервальное пространство на два интервальных множества (полупространства), точки которых удовлетворяют соответственно интервальным неравенствам [12] $\mathbf{F}(U) < \mathbf{0}$ и $\mathbf{F}(U) > \mathbf{0}$, согласно отношению порядка в пространстве $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

$$\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle b, 0 \rangle * \langle Y \rangle + \langle C \rangle * \langle Z \rangle + \langle D \rangle > \mathbf{0},$$
$$\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle b, 0 \rangle * \langle Y \rangle + \langle C \rangle * \langle Z \rangle + \langle D \rangle < \mathbf{0}$$

Если U_1 і U_2 – две точки одного интервального полупространства, то интервальный отрезок $[U_1, U_2]$ не пересекается с интервальной гиперплоскостью $\mathbf{\Pi}$, если же точки U_1 і U_2 принадлежат разным полупространствам, то отрезок $[U_1, U_2]$ пересекается с интервальной гиперплоскостью $\mathbf{\Pi}$.

Аксиома параллельности. Через заданную точку вне данной интервальной псевдоплоскости можно провести в пространстве не более одной псевдоплоскости, не пересекающей данную.

Данный факт легко пояснить методом «от противного».

В трехмерном интервальном пространстве при решении оптимизационной задачи размещении интервальных геометрических объектов используется поворот объектов на интервальные углы $(\langle \Theta_1 \rangle, \langle \Theta_2 \rangle, \langle \Theta_3 \rangle)$ с интервальными осями координат.

С этой целью определим вращение в $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ как действие, которое заключается в том, что каждой точке $U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ ставится в соответствие точка $U' = (\langle X' \rangle, \langle Y' \rangle, \langle Z' \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ как результат интервального отображения вида

$$\langle X \rangle = \langle L_1 \rangle * \langle X' \rangle) + \langle L_2 \rangle * \langle Y' \rangle + \langle L_3 \rangle * \langle Z' \rangle,$$
$$\langle Y \rangle = \langle M_1 \rangle * \langle X' \rangle) + \langle M_2 \rangle * \langle Y' \rangle) + \langle M_3 \rangle * \langle Z' \rangle,$$
$$\langle Z \rangle = \langle N_1 \rangle * \langle X' \rangle) + \langle N_2 \rangle * \langle Y' \rangle + \langle N_3 \rangle * \langle Z' \rangle,$$

$$\langle L_1 \rangle = \cos\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle - \sin\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_2^k \rangle * \sin\langle \Theta_3^k \rangle,$$
$$\langle M_1 \rangle = \sin\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle + \cos\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_2^k \rangle * \sin\langle \Theta_3^k \rangle,$$
$$\langle N_1 \rangle = \cos\langle \Theta_2^k \rangle * \sin\langle \Theta_3^k \rangle,$$

$$\langle L_2 \rangle = -\overline{\cos\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle} - \overline{\sin\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_2^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle},$$
$$\langle M_2 \rangle = -\overline{\sin\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle} + \cos\langle \Theta_1^k \rangle * \cos\langle \Theta_2^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle,$$
$$\langle N_2 \rangle = \sin\langle \Theta_2^k \rangle * \cos\langle \Theta_3^k \rangle, \quad \langle L_3 \rangle = \sin\langle \Theta_1^k \rangle * \sin\langle \Theta_2^k \rangle,$$
$$\langle M_3 \rangle = -\overline{\cos\langle \Theta_1^k \rangle * \sin\langle \Theta_2^k \rangle}, \quad \langle N_3 \rangle = \cos\langle \Theta_2^k \rangle,$$

где $*-$ знак интервального умножения, $\overline{\langle X \rangle} = \overline{\langle x, \nu_x \rangle} = \langle x, -\nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – элемент, сопряженный элементу $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Аксиомы движения евклидова пространства выполняются и в интервальной трехмерном пространстве.

Выводы. В ходе проведенных исследований на основе введенных понятий, операций в интервальных пространствах, свойствах интервальных отображений построена система аксиом трехмерного интервального пространства, проверена выполнимость аксиом евклидовой геометрии в трехмерном интервальном пространстве. Результаты исследования могут быть использованы как средства математического моделирования геометрических объектов с учетом погрешностей исходных данных, их взаимодействия в интервальных пространствах.

Список литературы: 1. *Стоян, Ю. Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / *Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев.* — Киев: Наукова думка, 1986. — 268 с. **2.** *Moore, R. E.* Interval analysis [Text] / R. E. Moore. — N. Y.: Prentice-Hall, 1966. — 400 p. **3**. *Kaucher, E.* Interval Analysis in the Extended Interval Space IR [Text] / E. Kaucher // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). Computing Supplementum. — 1980. — Vol. 2. — P. 33–49. doi:10.1007/978-3-7091-8577-3_3. **4.** *Markov, S. M.* Extended interval arithmetic involving infinite intervals [Text] / *S. M. Markov* // Mathematica Balkanika. — 1992. — № 6. — P. 269–304.**5.** *Laveuve, S. E.* Definition einer Kahan-Arithmetik und ihre Implementierung [Text] / *S. E. Laveuve* // Interval Mathematics. —Berlin — Heidelberg, 1975. — P. 236-245. **6.** *Sendov, B.* Segment derivatives and Taylor's formula [Text] / *B. Sendov* // C. R. Acad. Bulgare Sci. — 1977. — V. 30. — P. 1093-1096. **7.** *Ortolf, H. J.* Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik [Text] / H. J. Ortolf // Berichte der GMD Bonn. — 1969. — №11. **8.** *Каминская, Э. Л.* Модифицированная арифметика и теория погрешностей [Текст] / Э. Л. *Каминская, Т. Э. Каминский* // Вычислительная математика и математическая физика. — М., 1982. — С. 96-105. **9.** *Алефельд, Г.* Введение в интервальные вычисления [Текст] / *Г. Алефельд, Ю. Херцбергер* — М.: Мир, 1987. — 356 с. **10.** *Калмыков, С. А.* Методы интервального анализа [Текст] */ С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. — Новосибирск: Наука, 1986. — 224 с.* **11.** *Shary, S. P.* Solving the tolerance problem for interval linear equations [Text] / *S. P. Shary* // Interval Computations. — 1994. — №2. — P. 6-26. **12.** *Стоян, Ю. Г.* Метрическое пространство центрированных интервалов [Текст] / *Ю. Г. Стоян* // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23–25. **13.** *Стоян, Ю. Г.* Введення в інтервальну геометрію [Текст] / Ю.Г. Стоян // навчальний посібник для студентів спеціальності 7.080202 – Прикладна математика / *Ю. Г. Стоян* – Харків: ХНУРЕ, 2006. – 98 с. **14.** *Стоян, Ю. Г.* Интервальные отображения [Текст] / *Ю. Г. Стоян* // Доп. НАН України. — 1996. — №10. — С.57-63. **15.** *Евсеева, Л. Г.* Интервальная m-плоскость [Текст] / *Л. Г. Евсеева, Т. Е. Романова, С. Б. Шеховцов* // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 12(40). – С. 180–190. **16.** *Гребенник, И. В.* Интервальная прямая в пространстве $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ [Текст] / *И. В. Гребенник, Л. Г. Евсеева, Т. Е. Романова* // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 2. – С. 57–63. **17.** *Романова, Т. Е.* Интервальные направленные множества в многомерных интервальных пространствах [Текст] / *Т. Е. Романова, С. Б. Шеховцов, Л. Г. Евсеева* // Искусственный интеллект. – 2005. – № 4. – С. 169–176. **18.** *Евсеева, Л. Г.* Аксиомы порядка в трехмерном интервальном пространстве [Текст] / *Л. Г. Евсеева* // матер. міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука, (Київ, 2006 р.). – 2006. – С. 402. **19.** *Евсеева, Л. Г.* Развитие теории интервальной геометрии [Текст] / *Л. Г. Евсеева, Ю. Ю. Глушко* // Матеріали XV Международной научно-технической конференции ["Моделирование, идентификация, синтез систем управления"]. (Україна, АР Крым, 2012 г.) – Донецк: Ин-тут прикл. матем. и механ. НАН Украины. – 2012.

Bibliography (transliterated): 1. *Stoyan, Yu. G. Yakovlev, S. V.* (1986). Matematicheskie modeli i optimizacionnye metody geometricheskogo proektirovaniya. *Kiev: Naukova dumka*, 268. **2.** *Moore, R. E.* (1966). Interval analysis. *N. Y.: Prentice-Hall*, 400.**3.** *Kaucher, E.* (1980). Interval Analysis in the Extended Interval Space IR. Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). *Computing Supplementum*, 2, 33–49. doi:10.1007/978-3-7091-8577-3_3.**4.** *Markov, S. M.* (1992). Extended interval arithmetic involving infinite intervals. *Mathematica Balkanika,* 6, 269–304. **5.** *Laveuve, S. E.* (1975). Definition einer Kahan-Arithmetik und ihre Implementierung. Interval Mathematics. *Berlin – Heidelberg,* 236-245. **6.** *Sendov, B.* (1977). Segment derivatives and Taylor's formula. *C. R. Acad. Bulgare Sci,* 30, 1093-1096. **7.** *Ortolf, H. J.* (1969). Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik. *Berichte der GMD Bonn,* 11. **8.** *Kaminskaya, E. L., Kaminskij, T. E.* (1982). Modificirovannaya arifmetika i teoriya pogreshnostej. *Vychislitelnaya matematika i matematicheskaya fizika. Moscow*, 96-105. **9.** *Alefeld, G., Xercberger, Yu.* (1987). Vvedenie v intervalnye vychisleniya. *Moscow: Mir,* 356. **10.** *Kalmykov, S. A., Shokin, Yu. I., Yuldashev. Z. X.* (1986). Metody intervalnogo analiza. *Novosibirsk: Nauka,* 224. **11.** *Shary, S. P.* (1994). Solving the tolerance problem for interval linear equations. *Interval Computations,* 2, 6-26. **12.** *Stoyan, Yu. G.* (1996). Metricheskoe prostranstvo centrirovannyx intervalov. *Dokl. NAN Ukrainy. Ser. A,* 7, 23–25. **13.** *Stoyan, Yu. G.* (2006). Vvedennya v intervalnu geometriyu. Navchalnij posibnik dlya studentiv specialnosti 7.080202. *Prikladna matematika.* Kharkov*:* KhNURE, 98. **14.** *Stoyan, Yu. G.* (1996). Intervalnye otobrazheniya. *Dop. NAN Ukraïni,* 10, 57-63. **15.** *Evseeva, L. G., Romanova, T. E., Shexovcov, S. B.* (2004). Intervalnaya –ploskost. *Sistemi obrobki informacії.* Kharkov*:* XVU, 12(40), 180–190. **16.** *Grebennik, I. V., Evseeva, L. G., Romanova, T. E.* (2004). Intervalnaya pryamaya v prostranstve. *Radioelektronika i informatika*, 2, 57–63. **17.** *Romanova, T. E., Shexovcov, S. B., Evseeva, L. G.* (2005). Intervalnye napravlennye mnozhestva v mnogomernyx intervalnyx prostranstvax. *Iskusstvennyj intellekt,* 4, 169–176. **18.** *Evseeva L. G.* (2006). Aksiomy poryadka v trexmernom intervalnom prostranstve. Mater. mizhnar. nauk. konf. im. Moscow*, Kravchuka,* (Kiev), 402. **19.** *Evseeva, L. G., Glushko, Yu. Yu.* (2012). Razvitie teorii intervalnoj geometrii. Materiali XV Mezhdunarodnoj nauchno-texnicheskoj konferencii ["Modelirovanie, identifikaciya, sintez sistem upravleniya"]. *(Ukraïna, AR Krym, 2012 g.) Doneck: In-tut prikl. matem. i mexan. NAN Ukrainy.*

Поступилла (received) 28.05.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Евсеева Людмила Григорьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Полтавское высшее межрегиональное профессиональное училище; тел.: 095-54-36-256; e-mail: lg.yevseeva@gmail.com.

Євсеєва Людмила Григорівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Полтавське вище міжрегіональне професійне училище; тел.: 095-54-36-256; e-mail: lg.yevseeva@gmail.com.

Yevseeva Lyudmyla – candidate of physical and mathematical sciences, Poltavskoe mezhrehyonalnoe Higher Professional School; tel .: 095-54-36-256; e-mail: lg.yevseeva@gmail.com.