УДК 681.5.015.3

Р. С. ВОЛЯНСКИЙ, канд. техн. наук, ДДТУ, Днепродзержинск;
А. В. САДОВОЙ, д-р техн. наук, проректор, ДДТУ, Днепродзержинск

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОБОБЩЕННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Обзор работ, посвященных использованию методов линеаризации нелинейных уравнений, показал преимущества и недостатки линеаризации обратными связями по выходу и определил цель исследования. Для достижения поставленной цели уравнения движения обобщенного электромеханического объекта в псевдоаффинной форме дополнены уравнениями фильтра в матричной форме. Путем использования методов дифференциальной геометрии обоснована структура и параметры линеаризующего регулятора.

Ключевые слова: линеаризация обратными связями, динамическая система, нелинейный электромеханический объект, линеаризующий регулятор

Введение. В настоящее время одним из самых эффективных методов линеаризации нелинейных объектов, который не приводит к пренебрежению их уникальными свойствами, является линеаризация обратными связями. Совершенствованию и использованию этого метода посвящено большое количество работ как на территории бывшего СССР [1–5], так и во всем мире [6–10].

Общим недостатком указанных работ является предположение о алгебраической зависимости выходной измеряемой координаты от переменных состояния объекта. Это предположение является весьма грубым, поскольку в реальных технических системах сигналы, получаемые с датчиков, подвергаются фильтрации, а неподдающиеся непосредственному измерению координаты восстанавливаются при помощи наблюдающих устройств. Процесс фильтрации и наблюдения описывается дифференциальными уравнениями и сопровождается не только изменением амплитуды сигнала, но и вносит запаздывание. Пренебрежение этими факторами на этапе математического описания динамики объекта управления может привести к снижению запаса устойчивости замкнутой системы и вызвать возникновение слабодемпфированных колебаний. Поэтому работа, устраняющая указанные недостатки, является актуальной.

Цель работы. Целью работы является определение линеаризующего управляющего воздействия для обобщенной электромеханической системы (ЭМС) с фильтрованием сигнала обратной связи по регулируемой координате.

Методика исследования нелинейных ЭМС. Динамику обобщенной полностью управляемой электромеханической системы с одним входом в общем случае можно описать нелинейными дифференциальными уравнениями, представленными в нормальной форме в матричном виде [9]

$$\mathrm{p}\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \mathrm{u}), \tag{1}$$

где $\mathbf{Y} = (\mathrm{y}_1 \quad \dots \quad \mathrm{y}_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор переменных состояния, n - порядок системы управления, u - управляющее воздействие, $\mathbf{F}$ - вектор функций, описывающих динамику системы управления.

Поскольку линеаризация обратными связями разработана для аффинных систем, представим уравнения (1) в псевдоаффинной форме

$$p\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}, u) + \mathbf{G}u, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \ \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{Y}, u) & \dots & f_{n-1}(\mathbf{Y}, u) & f_n(\mathbf{Y}, u) - u \end{pmatrix}^T. \quad (3)$$

Дополним уравнение (2) дифференциальным уравнением наблюдаемости

$$p^k \hat{y}_j = H_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right), \quad (4)$$

где k - порядок дифференциального уравнения, описывающего динамику наблюдающего устройства, $H_d(.)$ - некоторая дифференциальная зависимость, описывающая динамику наблюдающего устройства, $\hat{Y}$ - вектор переменных состояния наблюдателя j-ой координаты

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_j & p\hat{y}_j & \dots & p^{k-1}\hat{y}_j \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Представим дифференциальное уравнение (4) в виде системы k-го порядка

$$p\hat{y}_i = \hat{y}_{i+1}; \quad i = j, \dots k-1, \quad p\hat{y}_k = H_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right), \quad (6)$$

Или

$$p\hat{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{H}}_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right), \quad (7)$$

где

$$\tilde{\mathbf{H}}_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right) = \left(\hat{y}_j \quad \dots \quad \hat{y}_{k-1} \quad H_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right)\right)^T. \quad (8)$$

Уравнения (7) позволяют сформулировать следующую теорему: *Дифференциальные уравнения наблюдаемости (7) являются обобщением известного уравнения наблюдаемости*

$$\hat{y}_j = H_a(\mathbf{Y}) \quad (9)$$

и позволяют путем введения производных от задающего воздействия расширить класс управляющих воздействий, линеаризующих динамику исходного нелинейного электромеханического объекта.

В уравнении (9) $H_a(.)$ - алгебраическая зависимость, определяющая взаимосвязь переменных состояния объекта с наблюдаемой координатой.

В качестве доказательства линеаризуем динамическую систему, которая описывается уравнениями (2) и (4) по выходу. Для этого найдем полную производную правой части последнего уравнения системы (6)

$$p\left(p\hat{y}_k\right) = p^{k+1}\hat{y}_j = pH_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right) = \frac{dH_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\mathbf{Y}} p\mathbf{Y} + \frac{dH_d\left(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\hat{\mathbf{Y}}} p\hat{\mathbf{Y}}. \quad (10)$$

С учетом правых частей уравнений (2) и (7) выражение (10) примет вид

$$p^{k+1}\hat{y}_j = \frac{dH_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\mathbf{Y}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y},u) + \frac{dH_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\mathbf{Y}}\mathbf{G}u + \frac{dH_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\hat{\mathbf{Y}}}\tilde{\mathbf{H}}_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right) \tag{11}$$

Слагаемые правой части уравнения (11) представляют собой производные Ли, которые определяются выражениями

$$L_{\mathbf{\Phi}}H_d = \frac{dH_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\mathbf{Y}}\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y},u); \quad L_{\mathbf{G}}H_d = \frac{dH_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\mathbf{Y}}\mathbf{G}; \tag{12}$$
$$L_{\tilde{\mathbf{H}}_d}H_d = \frac{dH_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right)}{d\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{H}}_d\left(\mathbf{Y},\hat{\mathbf{Y}}\right).$$

С учетом производных Ли (12) уравнение (11) будет

$$p^{k+1}\hat{y}_j = L_{\mathbf{\Phi}}H_d + L_{\mathbf{G}}H_d u + L_{\tilde{\mathbf{H}}_d}H_d. \tag{13}$$

Как и в известном случае алгебраического уравнения наблюдаемости (9), линеаризация обратными связями по выходу при использовании дифференциального уравнения наблюдаемости (7) сводится к рекурсивному r-кратному дифференцированию уравнения (11). Условием прекращения дифференцирования является ненулевая производная Ли $L_{\mathbf{G}}H_d$, определяющая влияние управляющего воздействия u на $r+k$-ую производную наблюдаемой величины. При этом уравнение (13) примет вид

$$p^{r+k}\hat{y}_j = \sum_{i=1}^{r} L^i_{\mathbf{\Phi}}H_d + \sum_{i=1}^{r} L^i_{\tilde{\mathbf{H}}_d}H_d + \sum_{i,j=1}^{r-1} L^i_{\mathbf{\Phi}}L^j_{\tilde{\mathbf{H}}_d}H_d + \tag{14}$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{r-1} L^j_{\tilde{\mathbf{H}}_d}L^i_{\mathbf{\Phi}}H_d + L_{\mathbf{G}}L^{r-1}_{\mathbf{\Phi}}H_d u.$$

Второе, третье и четвертое слагаемые уравнения (14) определяются компонентами матрицы $\tilde{\mathbf{H}}_d$, которые в силу выражения (8) зависят от траекторий движения наблюдающего устройства. Таким образом, в отличие от классической линеаризации обратными связями по выходу в рассматриваемом случае вводится не только новое управляющее воздействие v, заменяющее r-ую производную от наблюдаемой величины

$$p^r\hat{y}_j = v, \tag{15}$$

но и ряд производных от нового управляющего воздействия

$$p^{r+i}\hat{y}_j = p^i v; \quad i = 1,\ldots,k. \tag{16}$$

Подстановка производных (15) и (16) в уравнение (14) и выполнение соответствующих алгебраических преобразований, позволяет представить уравнение (14) следующим образом

$$p^k v = W(\mathbf{Y},u,\mathbf{V}), \tag{17}$$

где $W(.)$ - результат преобразования правой части уравнения (14)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v & pv & \ldots & p^{k-1}v \end{pmatrix}^T. \tag{18}$$

Решение уравнения (17) относительно управляющего воздействия u будем искать в виде

$$u = W^{-1}\left(\mathbf{Y}, \mathbf{V}, p^k v\right) \tag{19}$$

или с учетом матрицы (18)

$$u = W^{-1}\left(y_1, \ldots, y_n, v, pv, \ldots p^k v\right). \tag{20}$$

В отличие от классической линеаризации обратными связями, полученное управляющее воздействие зависит от n переменных состояния рассматриваемого объекта и k первых производных от задающего воздействия v. Теорема доказана.

Следствие теоремы: *Если наблюдающее устройство, определяющее регулируемую координату электромеханического объекта, является инерционным и описывается системой* k *дифференциальных уравнений, то для компенсации этой инерционности в состав линеаризующего регулятора помимо звеньев, выполняющих алгебраические операции, должны быть включены* k *дифференцирующих звена.*

Обсуждение результатов использования предложенной методики. В качестве примера линеаризуем обобщенный электромеханический объект первого порядка с апериодическим звеном первого порядка в канале обратной связи по скорости.

Дифференциальное уравнение объекта управления имеет вид

$$T_m p\omega + \omega = u / c, \tag{21}$$

где T_m - электромеханическая постоянная времени, c - конструктивный коэффициент, ω - скорость двигателя, u - напряжение питания.

Сигнал в канале обратной связи формируется в соответствии с уравнением

$$Tp\hat{\omega} + \hat{\omega} = K\omega, \tag{22}$$

где T и k - постоянная времени и коэффициент передачи фильтра в канале обратной связи. Представим уравнения (21) и (22) в нормальной форме

$$p\omega = -\frac{1}{T_m}\omega + \frac{1}{T_m c}u; \tag{23}$$

$$p\hat{\omega} = -\frac{1}{T}\hat{\omega} + \frac{K}{T}\omega \tag{24}$$

и ввиду малости порядка объекта управления рассмотрим упрощенную процедуру синтеза линеаризующего регулятора без использования матричного исчисления и дифференциальной геометрии.

Для определения нового управляющего воздействия v продифференцируем уравнение (24)

$$p^2\hat{\omega} = -\frac{1}{T}p\hat{\omega} + \frac{K}{T}p\omega. \tag{25}$$

С учетом зависимостей (23) и (24) уравнение (25) преобразуем следующим образом

$$p^2\hat{\omega} = -\frac{1}{T}p\hat{\omega} + \frac{K}{T}\left(-\frac{1}{T_m}\omega + \frac{U}{T_m c}\right) = -\frac{1}{T}p\hat{\omega} - \frac{K}{T_m T}\omega + \frac{K}{T_m T c}u. \tag{26}$$

Введем новое управляющее воздействие

$$p\hat{\omega} = v \qquad , \; p^2\hat{\omega} = pv \tag{27}$$

С учетом производных (27) уравнение (26) примет вид

$$pv = -\frac{1}{T}v - \frac{K}{T_m T}\omega + \frac{K}{T_m Tc}u\,. \tag{28}$$

Решив уравнение (28) относительно управляющего воздействия u, получим

$$u = \frac{T_m Tc}{K}pv + \frac{T_m c}{K}v + c\omega = c\omega + T_m c\frac{Tp+1}{K}v\,. \tag{29}$$

Анализ выражения (29) показывает наличие во втором слагаемом передаточной функции, обратной передаточной функции фильтра. Благодаря этому слагаемому в синтезированной системе осуществляется формирование форсирующего воздействия, компенсирующего инерционность филь-тра. Структурная схема системы управления, которая построена на основании алго-ритма (29), приве-дена на рис. 1.

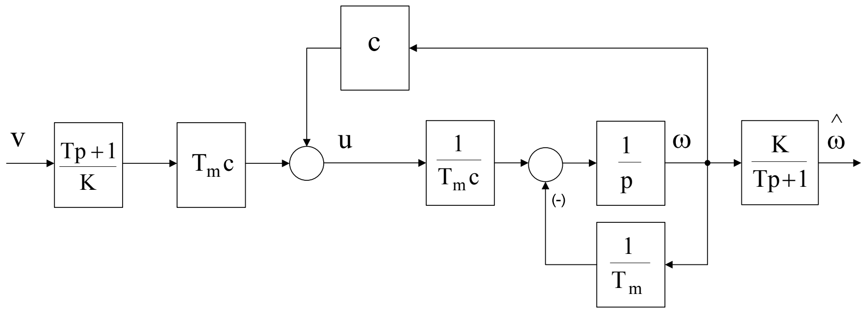

Рис. 1 – Структурная схема синтезированной системы управления

Обобщая результаты, приведенные в рассматриваемом примере можно утверждать, что:

1. Синтезированный линеаризующий регулятор за счет положительной обратной связи по скорости компенсирует внутреннюю обратную двигателя;
2. Компенсация инерционности фильтра в канале обратной связи по скорости осуществляется дифференцированием задающего воздействия v;
3. Синтезированный линеаризующий регулятор соответствует принципу симметрии систем автоматического управления;

Выводы. Приведенные в работе выкладки позволяют сделать вывод, что учет на этапе составления математического описания объекта управления неидеальностей каналов обратной связи позволяет повысить качество процессов управления электромеханическими объектами путем введения в алгоритм управления компенсирующих связей и составляющих.

Список литературы: **1.** *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы [Текст]/ *Д. П. Ким*. - М.: Физматлит, 2004.-464с. **2**. *Пупков К. А.* Методы классической и современной теории автоматического управления. Том 5. Методы современной теории автоматического управления [Текст]/ *Н. Д. Егупов, К. А. Пупков.* – М.: Бауманпресс, 2004.-748с. **3.** *Борисевич, А. В.* Теория автоматического управления: элементарное введение с применением MATLAB/ *А. В. Борисевич* - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. - 200 с. **4.** *Афанасьев, В. Н.* Гарантированное управление нелинейными системами, линеаризуемыми обратной связью/*В. Н. Афанасьев*// Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской конференции, Казань, 12-16 июня 2012 г.. Т. 3.3: Управление. Ч. 1. Издательство Казанского государственного технического университета, 2012. С. 156-168. **5.** *Суслов, В. Ф.* Синтез астатических регуляторов многосвязных нелинейных объектов, линеаризуемых обратной связью [Текст]/ В.Ф. Суслов, М. С. Катков, О. В. Надеждин// Морской вестник. Спб.: МорВест, 2005.- №3(15). -С.53-55. **6.** *Piltan, F.* Design Novel Fuzzy Robust Feedback Linearization