АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА УПРАВЛІННЯ МЕХАНІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТА КОМПЛЕКСАМИ

УДК.514.18

Є. О. АДОНЬЄВ, В. М. ВЕРЕЩАГА

РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ

При моделюванні багатофакторних процесів виникає проблема використання матриць великих розмірів. Потреба в уникненні цієї проблеми викликала необхідність розробки нових методів моделювання багатофакторних задач. Точкове БН-числення [1, 2], що побудоване на встановленні внутрішніх геометричних зв'язків між елементами геометричної фігури, дає можливість для збільшення кількості вихідних факторів будь-якої задачі інтерполяції. Застосування методів точкового БН-числення для розв'язання задач інтерполяції, названо геометричною інтерполяцією.

Ключові слова: точкове БН-числення, геометричні матриці точок та параметрів, операції над геоматрицями, задачі з геоматрицями, Б-лінії, Б-поверхні, Б-моделі.

При моделировании многофакторных процессов возникает проблема использования матриц больших размеров. Потребность избежать этой проблемы вызвала необходимость разработки новых методов моделирования многофакторных задач. Точечное БН-исчисление [1, 2], построенное на установлении внутренних геометрических связей между элементами геометрической фигуры, предоставляет возможность увеличения количества исходных факторов любой задачи интерполяции. Применение методов точечного исчисления для решения задач интерполяции названо методом геометрической интерполяции.

Ключевые слова: точечное БН-исчисление, геометрические матрицы точек та параметров, операции над геоматрицами, задачи з геоматрицами, Б-линии, Б-поверхности, Б-модели.

When modeling multifactor processes, the problem of the use of large-size matrices arises. The need to avoid this problem has necessitated the development of new methods for modeling multifactor tasks. Point BN-calculation [1, 2], built on the establishment of internal geometric connections between the elements of a geometric figure, provides an opportunity to increase the number of initial factors of any interpolation problem. The application of the methods of point calculation to solving interpolation problems is called the method of geometric interpolation.

To construct geometric shapes, in a point BN-calculation, it is advisable to use matrices that provide a convenient scheme for drawing point shapes for B-lines and B-surfaces. In this connection, the concept of a geometric matrix (geomatrix) and the corresponding notation are introduced. Defined properties of the geomatrices, as well as the method of compiling geomatrices. Operations on geomatrices and actions with them are developed.

The application of the properties of the geomatrices in the modelling of multifactorial situations and processes by means of point BN-calculation avoids the need to establish analytical connections between the source elements of the model, which greatly simplifies the process of interpolation during modeling.

Keywords: point BN-calculus, geometric matrixes of points and parameters, operations on geomatrixes, problems with geomatrixes, B-lines, B-surfaces, B-models.

Вступ. Однією з найважливіших задач математики є дослідження і розв'язання систем рівнянь першого ступеня, для вирішення якої було розроблено теорію матриць. Застосування матриць до розв'язання систем рівнянь, у кінцевому рахунку, розв'язує задачі інтерполяційного характеру. Однак, розвиток людства створює умови для появи нових методів досліджень, які потребують введення нових математичних понять, визначень, тощо, які б задовольняли вимогам, що висувають прикладні науки.

Існуюча теорія матриць призначена для розв'язання систем лінійних рівнянь алгебраїчними методами. Однак, при цьому, збільшення розмірів матриць приводить до зростання похибки у розрахунках, що зводить нанівець результати розв'язання будь-якої задачі.

При використанні методів геометричної інтерполяції не застосовуються матриці і тому не виникає проблем, пов'язаних з великими розмірами матриць. Однак, при цьому, виникає проблема безпомилкового складання точкового рівняння інтерполянта, що інтерполює велику кількість вихідних даних. Наприклад, інтерполяція поверхні, визначеної кількістю точок у двох напрямках $m \times n$: 3×4; 5×8; 7×9; 10×10. Для уникнення цієї проблеми вводимо геоматриці.

У цій статті вказується на деякі властивості та особливості геоматриць. Одержані результати досліджень, щодо цілей створення геоматриць, є завершеними. У той же самий час, досягнуті результати відносно геоматриць не є закритими і мають можливість подальшого розширення. Однак, розробки в рамках цієї статті, на різі, цього не потребують.

Метод геометричної інтерполяції у точковому БН-численні. Метод базується на простому відношенні трьох точок прямої [3]. Просте відношення трьох точок прямої умовно позначається *(ABC),* що з геометричної точки зору означає відношення двох відтинків $\frac{AC}{BC}$. У точковій формі кожен з відтинків подається як різниця між точками, тоді відношення відтинків у точковій формі матиме вигляд: $\frac{A-C}{B-C}$. Таким чином, можемо записати $(ABC)=\frac{AC}{BC}\rightarrow\frac{A-C}{B-C}$, що у координатній формі означає:

$$\frac{A-C}{B-C}\rightarrow\frac{X_A-X_C}{X_B-X_C}=\frac{Y_A-Y_C}{Y_B-Y_C}=\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}=...=t\ .$$

Тоді можемо записати із наведеного вище рівняння $\frac{A-C}{B-C}=t$.

Розв'яжемо це рівняння відносно точки C, застосовуючи до точок загальновідомі алгебраїчні операції, та отримаємо:

$$A-C=(B-C)t,\rightarrow A=(B-C)t+C;\ (0\le t\le 1).$$

У цьому рівнянні точки B і C є базовими, точка A – змінювана. Якщо параметр t дорівнює нулю, отримаємо $A\equiv C$, якщо параметр $t=1$, отримаємо $A\equiv B$. Таким чином, змінювана точка A, переміщуючись уздовж відтинку BC, геометрично інтерполює його. На відміну від алгебраїчної інтерполяції, виконання геометричної інтерполяції не потребує розв'язання систем лінійних рівнянь [4].

Якщо узяти симплекс CAB, що визначає двомірний геометричний образ – площину, то точкові рівняння, що визначають змінювану точку M на цій площині, відносно точок C, A, B симплексу CAB, матимуть вигляд:

$$M=(A-C)p+(B-C)q+C\text{ , або}$$
$$M=Ap+Bq+Cr\text{ , при умові } p+q+r=1\text{ .}$$

При цьому, якщо усі параметри p, q, r є додатними, точка M пробігає усі положення в середині ΔABC, якщо хоча б один з вказаних параметрів є від'ємним, то змінювана точка M знаходиться за межами ΔABC.

У наведених прикладах виконувалась геометрична інтерполяція двох та трьох точок. Однак, запропонований метод геометричної інтерполяції має можливість інтерполювати значно більшу кількість точок, наприклад, 20, 30, 40, 50 і так далі. У таких випадках складання точкових рівнянь не є таким простим, як для двох та трьох точок. Тут виникає потреба застосування геоматриць для складання відповідних точкових рівнянь інтерполяції великої кількості вихідних точок.

Введення геоматриць надає певні алгоритми утворення точкових рівнянь інтерполяції для необхідної кількості вихідних точок. Наявність таких алгоритмів виключає появу механічних помилок у точкових рівняннях інтерполянтів.

Деякі властивості геоматриць. Як відомо [5], матрицею розміру m×n називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків та n стовпчиків.

Позначаються матриці прописними (заголовними) літерами латинського алфавіту, а елементи – відповідними рядковими літерами. При цьому, таблиці чисел беруться у круглі чи квадратні дужки, або обмежуються прямими подвійними лініями:

$$A=(a_{ij});\quad B=[b_{ij}];\quad C=\left\|c_{ij}\right\|,\quad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}.\quad (1)$$

Однак, з появою точкового БН-числення [1], у якому інтерполяції та апроксимації розв'язуються не алгебраїчними, а геометричними методами, виникла необхідність створення геометричних матриць, які є схемою для безпомилкового складання точкових форм для Б-ліній та Б-поверхонь [7]. Як відомо [8, 9], точкові рівняння забезпечують проходження через наперед визначені точки. Вони побудовані на використанні внутрішніх геометричних відношень між елементами у локальних симплексах [10]. При цьому, немає необхідності розв'язувати систему рівнянь.

Означення 1. Геометричною матрицею, у точковому БН-численні, будемо називати прямокутну таблицю, елементами якої є точки або параметри двомірної геометричної фігури, що розташовані у цій матриці у повній відповідності з розташуванням на геометричній фігурі.

Наприклад, Б-поверхня (**рис. 1**) четвертого порядку визначається дев'ятьма наперед заданими точками A_{ij}.

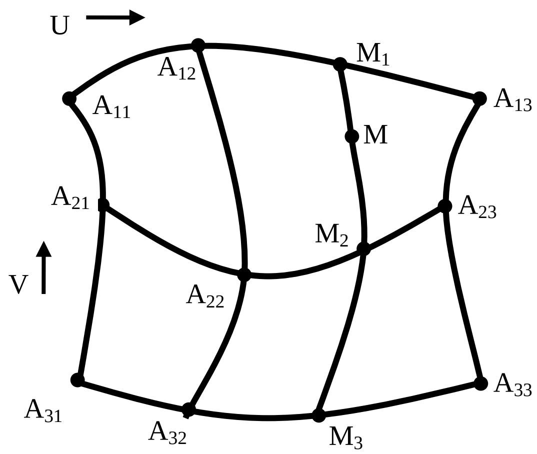

Рис. 1. Геометрична схема Б-поверхні у просторі

Тоді для точок геометрична матриця A, що відповідає схемі (**рис. 1**), матиме вигляд

$$A_T=\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}\right)\qquad (2)$$

На відміну від (1), для геометричної матриці нами застосовано подвійні круглі дужки. У скороченому вигляді для точок геометричну матрицю можна записати:

$$A_T=((A_{ij}));\quad B_T=[[B_{ij}]];\quad C_T=\left|\left\|C_{ij}\right\|\right|;\quad i=\overline{1,m};$$
$$j=\overline{1,n}.\qquad (3)$$

У скороченому запису для параметрів геоматриця матиме вигляд:

$$A_{\Pi}=((a_{ij}));\quad B_{\Pi}=[[b_{ij}]];\quad C_{\Pi}=\left|\left\|c_{ij}\right\|\right|;\quad i=\overline{1,m};$$
$$j=\overline{1,n}.$$

Вживання у позначеннях (3) додаткових дужок та прямих у порівнянні з (1), на нашу думку, надасть можливість відрізнити геометричну матрицю від алгебраїчної. Геоматриці (2) у точковій формі відповідають геоматриці у координатній формі. Наприклад, для 3-простору:

$$X_A = \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\right), \qquad Y_A = \left(\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}\right),$$

$$Z_A = \left(\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}\right). \tag{4}$$

Наведені геометричні матриці (3), (4) A, X_A, Y_A, Z_A є квадратними і можуть позначатися $\underset{3\times3}{A}$, $\underset{3\times3}{X_A}$, $\underset{3\times3}{Y_A}$, $\underset{3\times3}{Z_A}$. Однак, у подальших дослідженнях, будуть розглядатися і прямокутні геометричні матриці $\underset{m\times n}{A}$; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Число, яке дорівнює *min(m; n)*, визначає порядок геометричної матриці.

В усіх розглянутих випадках, і взагалі, запис елементів матриці для параметрів і точок повністю відповідає розташуванню на Б-лініях та Б-поверхнях. Однакові індекси точок геометричної фігури та елементів геоматриці надає ознаки співставлення Б-ліній і рядків або стовпців геоматриці; Б-поверхні та геоматриці в цілому.

Означення 2. Дві геометричні матриці A і B одного порядку називають рівними, якщо співпадають точки, що входять до їхнього складу, тобто:

$$A_{ij} = B_{ij},\ \forall\ \ i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n}.$$

Означення 3. Геометрична матриця $((A_{1j}))$, що складається з одного рядка, називається геометричною матрицею-рядком, яка відповідає вихідним точкам ребра поверхні у напрямку U.

Означення 4. Геометрична матриця $((A_{i1}))$, що складається з одного стовпчика – називається геометричною матрицею-стовпцем, до якого включено вихідні точки ребра Б-поверхні у напрямку V. Наприклад:

$A_i = ((A_{i1}\ \ A_{i2}\ \ A_{i3}))$, $i=\overline{1,3}$, тобто, геометричних матриць-рядків може бути $i=\overline{1,m}$, у наведеному прикладі – три.

$$B_{ij} = \left(\begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ B_{3j} \end{pmatrix}\right) \text{ – матриця-стовпець.}$$

для $j=\overline{1,3}$. таких стовпців буде – три.

Точки геометричної матриці A_{ij}, у яких номер стовпця дорівнює номеру рядка ($i=j$), називаються діагональними.

Якщо усі точки геометричної матриці дорівнюють одиниці, то така геометрична матриця (геоматриця) називається одиничною.

Геоматриця будь-якого розміру називається нульовою геоматрицею, або нуль-геоматрицею, якщо усі її точки дорівнюють нулю. Наприклад, A – одинична геоматриця, B – нуль-геоматриця:

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right); \quad B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

У прикладах, що наведені вище і будуть наведені далі, розглянуто 3-вимірні випадки, що ні в якому випадку не знижує цінність результатів. Більш загальний результат досягається простим збільшенням значень $m\times n$.

Над геоматрицями, як і над матрицями, можна робити ряд операцій, які у більшості своїй відрізняються від операцій над матрицями.

Множення геоматриці на число. Добутком геоматриці A на число λ називається геоматриця $B=\lambda\cdot A$, точки якої $B_{ij}=\lambda\cdot A_{ij}$, для $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Множення геоматриці параметрів на геоматрицю точок. Добутком геоматриці параметрів В на геоматрицю точок А є геоматриця точок C, кожен елемент якої є точка $C_{ij}=b_{ij}\cdot A_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ є добутком відповідних елементів b_{ij} на A_{ij} за умови, що індекси цих елементів співпадають.

Наприклад:

$$B\cdot A = C = \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} b_{11}\cdot A_{11} & b_{12}\cdot A_{12} & b_{13}\cdot A_{13} \\ b_{21}\cdot A_{21} & b_{22}\cdot A_{22} & b_{23}\cdot A_{23} \\ b_{31}\cdot A_{31} & b_{32}\cdot A_{32} & b_{33}\cdot A_{33} \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}\right) \tag{5}$$

Елементами геоматриці B є параметри, тому вони записані малими літерами b_{ij}, а елементами геоматриці A є точки, тому вони записані великими літерами A_{ij}.

Розташування елементів геоматриць параметрів і точок знаходяться у співставленні з точками Б-поверхні. Відмінність між нами полягає лише у вигляді елементів.

Таке правило множення геоматриці параметрів B на геоматрицю точок A запроваджується для виконання умов геометричної інтерполяції. Це правило множення є результатом громіздких алгебраїчних перетворень, наведення яких перевищить дозволені межі даної публікації. Впровадження геоматриць як раз і дозволяє уникнути помилок при виконанні кожного разу цих алгебраїчних перетворень для здійснення геометричної інтерполяції. Уникнення помилок при виконанні алгебраїчних перетворень для геометричної інтерполяції якраз і спонукали впровадження такого правила множення геоматриць.

Застосування геоматриць значно скорочує час складання точкового рівняння інтерполянта.

Добутком геоматриці параметрів B на геоматрицю параметрів C, елементами яких є параметри геометричної фігури, є геоматриця параметрів D, кожен з елементів якої є є добутком відповідних елементів геоматриць B і C; $d_{ij}=b_{ij}\cdot c_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ за умови, що індекси цих елементів співпадають.

$$B \cdot C = D = \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} b_{11} \cdot c_{11} & b_{12} \cdot c_{12} & b_{13} \cdot c_{13} \\ b_{21} \cdot c_{21} & b_{22} \cdot c_{22} & b_{23} \cdot c_{23} \\ b_{31} \cdot c_{31} & b_{32} \cdot c_{32} & b_{33} \cdot c_{33} \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}\right). \quad (6)$$

Відмінністю між множенням (5) та (6) є те, що у першому випадку перемножуються геоматриці параметрів та точок, а у другому – дві геоматриці параметрів. Суперечностей, при цьому, не виникає.

Наслідком із добутків геоматриці на число та на матрицю є те, що будь-яку геоматрицю можна скоротити на спільний множник.

$$((A_{ij}))=\lambda \cdot ((B_{ij})), \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \quad (7)$$

З геометричної точки зору, рівняння (7) означає зменшення на величину λ якоїсь однієї або усіх координат точок A_{ij}, тобто, перенесення координатної площини вихідної системи координат паралельно самій собі на величину λ.

Додавання геоматриць. Зауважимо, що геоматриці-доданки повинні бути однакового розміру і їхні елементи повинні мати однакові найменування – або точки, або параметри. Тобто, геоматрицю параметрів $((a_{ij}))$ не можна складати з геоматрицею точок $((B_{ij}))$. Кожній геоматриці точок *A* відповідає кількість геоматриць за координатами. Наприклад, для 3-вимірного простору геоматриця точок *A* має геоматриці уздовж:

координати *x* – геоматрицю $A(x)=((A_{ij}(x)));$

координати у – геоматрицю $A(y)=((A_{ij}(y)));$

координати *z* – геоматрицю $A(z)=((A_{ij}(z))).$

Враховуючи сказане вище, під сумою двох геоматриць *A* і *B* треба розуміти геоматрицю *C*, елементами якої є $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$, і якщо, при цьому, не указується, за якою координатою здійснювати додавання, то його треба виконати за усіма координатами. Наприклад, для 3-вимірного простору *C=A+B* треба виконати:

$C(x)=((A(x)+B(x)));$
$C(y)=((A(y)+B(y)));$
$C(z)=((A(z)+B(z))).$

Запишемо більш детально додавання геометричних матриць за координатою Z:

$$C(z) = A(z) + B(z) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} A_{11}(z)+B_{11}(z) & A_{12}(z)+B_{12}(z) & A_{13}(z)+B_{13}(z) \\ A_{21}(z)+B_{21}(z) & A_{22}(z)+B_{22}(z) & A_{23}(z)+B_{23}(z) \\ A_{31}(z)+B_{31}(z) & A_{32}(z)+B_{32}(z) & A_{33}(z)+B_{33}(z) \end{pmatrix}\right) \quad (7)$$

Покоординатне додавання випливає з існуючих правил додавання точок. Якщо додаються дві точки, то необхідно знайти суми відповідних чисел, що їх визначають. Точка поля за Ленгом [11] завжди повинна задовольняти умовам $f(1)=1$, $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(ab)=f(a)\cdot f(b)$, що повністю узгоджується з операціями над геометричними матрицями, які пропонуються у цьому дослідженні.

Додавання геоматриці числа до геоматриць точок або параметрів. Означення. Геоматрицею числа λ будемо вважати таблицю розміром $m \times n$, елементами якої є однакові числа, які усі дорівнюють значенню λ, наприклад, геоматриця 3×3 для числа λ матиме вигляд:

$$\lambda = \left(\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}\right).$$

Знову ж таки, виходячи з визначення точки за Ленгом [11], додаванням числа λ до геоматриці точок *A* є геоматриця *B*, елементами якої є $B_{ij}=A_{ij}+\lambda$. При цьому, якщо не вказано, до якої координати додавати число λ, то додавання необхідно виконати до усіх координат. Наприклад, для 3-вимірного простору запис $B=A+\lambda$ вказує на необхідність виконання наступних дій.

$$B(x)=A(x)+\lambda; \; B(y)=A(y)+\lambda; \; B(z)=A(z)+\lambda.$$

Для прикладу, запишемо детальніше додавання числа *λ* до геоматриці *A(x)* за координатою *X*.

$$B(x) = A(x) + \lambda = \left(\begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & A_{13}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & A_{23}(x) \\ A_{31}(x) & A_{32}(x) & A_{33}(x) \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} A_{11}(x)+\lambda & A_{12}(x)+\lambda & A_{13}(x)+\lambda \\ A_{21}(x)+\lambda & A_{22}(x)+\lambda & A_{23}(x)+\lambda \\ A_{31}(x)+\lambda & A_{32}(x)+\lambda & A_{33}(x)+\lambda \end{pmatrix}\right). \quad (8)$$

Властивості геоматриць та операції над ними докорінно відрізняються від загальновідомих через те, що відрізняються філософії їхнього утворення та призначення геоматриць та традиційних матриць. Традиційні матриці призначені для алгебраїчної інтерполяції, а геоматриці – для геометричної інтерполяції, яка здійснюється з використанням Б-ліній та Б-поверхонь.

Висновки. Проведені дослідження базуються на математичному апараті точкового БН-числення, у якому інтерполяції та апроксимації розв'язуються не алгебраїчними, а геометричними методами. Для побудови геометричних фігур, у точковому БН-численні, доцільно використовувати матриці, які надають зручну схему для складання точкових форм для Б-ліній та Б-поверхонь. У зв'язку з цим, введено поняття геометричної матриці (геоматриці) та відповідне позначення. Визначені властивості геоматриць, а також спосіб складання геоматриць. Розроблено операції над геоматрицями та дії з ними.

Застосування властивостей геоматриць при моделюванні багатофакторних ситуацій та процесів інструментами точкового БН-числення дозволяє уникнути необхідності встановлення аналітичних залежностей між вихідними елементами моделі, що значно спрощує процес інтерполяції при моделюванні.

Список літератури:

1. Балюба, И. Г. Точечное исчисление [Текст]: учеб. пос. / И. Г. Балюба, В. М. Найдыш; под ред. В. М. Верещаги. – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
2. Балюба, И. Г. Конструктивная геометрия многоообразий в точечном исчислении [Текст]: автореф. дисс. … д-ра техн. наук / И. Г. Балюба. – К., 1995. – 36 с.
3. Четверухин, Н. Ф. Проективная геометрия [Текст] / Н. Ф. Четверухин. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1961. – 360 с.
4. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии [Текст] / Н. В. Ефимов. – 12-е изд., стереотип. – Ленинград: Изд-во "Наука", 1975. – 272 с.
5. Мышкис, А. Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы [Текст] / А. Д. Мышкис. – М., 1971. – 632 с.
6. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахе. – 4-е изд. – М., 1988. – 560 с.
7. Адоньєв, Є. О. Визначення та аналіз параболічної поверхні Балюби (БПП) [Текст] / Є. О. Адоньєв, В. О. Верещага // Системні технології. – 2017. – Вип. 1 (108). – С. 3–11.
8. Адоньєв, Є. О. Композиційний метод геометричного моделювання: суть, особливості та перспективи застосування [Текст] / Є. О. Адоньєв // Сучасні проблеми моделювання. – 2017. – Вип. 8. – С. 3–14.
9. Адоньєв, Є. О. Алгоритм формування моделей багатофакторних процесів композиційного методу [Текст]: VI-ї Всеукр. наук.-практ. конф. / Є. О. Адоньєв, В. М. Верещага, А. В. Найдиш // Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених. – 2017. – Вип. 6. – С. 12–18.
10. Давиденко, І. П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу [Текст]: автореф. дис. … канд. техн. наук / І. П. Давиденко; Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь, 2012. – 23 с.
11. Ленг, С. Алгебра [Текст] / С. Ленг. – Москва: Мир, 1968. – 654 с.

Bibliography (transliterated):

1. Balyuba, I. G., Naydysh, V. M.; Vereshchaga, V. M. (Ed.) (2015). Tochechnoe ischislenie. Melitopol': MGPU im. B. Hmel'nitskogo, 236.
2. Balyuba, I. G. (1995). Konstruktivnaya geometriya mnogooobraziy v tochechnom ischislenii. Kyiv, 36.
3. Chetveruhin, N. F. (1961). Proektivnaya geometriya. Moscow: Gosudarstvennoe uchebno-pedagogicheskoe izdatel'stvo ministerstva prosveshcheniya RSFSR, 360.
4. Efimov, N. V. (1975). Kratkiy kurs analiticheskoy geometrii. Leningrad: Izd-vo "Nauka", 272 s.
5. Myshkis, A. D. (1971). Matematika dlya VTUZov. Spetsial'nye kursy. Moscow, 632.
6. Gantmaher, F. R. (1988). Teoriya matrits. Moscow, 560.
7. Adoniev, Ye. O., Vereshchaha, V. O. (2017). Vyznachennia ta analiz parabolichnoi poverkhni Baliuby (BPP). Systemni tekhnolohiy, 1 (108), 3–11.
8. Adoniev, Ye. O. (2017). Kompozytsiynyi metod heometrychnoho modeliuvannia: sut, osoblyvosti ta perspektyvy zastosuvannia. Suchasni problemy modeliuvannia, 8, 3–14.
9. Adoniev, Ye. O., Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V. (2017). Alhorytm formuvannia modelei bahatofaktornykh protsesiv kompozytsiynoho metodu. Prykladna heometriya, dyzain, obiekty intelektualnoi vlasnosti ta innovatsiyna diyalnist studentiv ta molodykh vchenykh, 6, 12–18.
10. Davydenko, I. P. (2012). Konstruiuvannia poverkhon prostorovykh form metodom rukhomoho sympleksu. Melitopol, 23.
11. Leng, S. (1968). Algebra. Moscow: Mir, 654.

Надійшла (received) 24.05.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розробка та дослідження властивостей геометричних матриць/ Адоньєв Є. О., Верещага В. М. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – No 33(1255). – С. 13–17– Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2079-5459.

Разработка и исследование свойств геометрических матриц/ Адоньев Е. А., Верещага В. М. //Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU "KhPI", 2017. – № 33 (1255).– P.13–17. – Bibliogr.:11. – ISSN 2079-5459

Development and study of properties of geometric matrices/ Adoniev Y., Vereshchaga V. //Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU "KhPI", 2017. – № 33 (1255).– P. 13–17– Bibliogr.:11. – ISSN 2079-5459

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Верещага Віктор Михайлович – доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Богдана Хмельницького; вул. Гетьманська, 20, м. Мелітополь, Україна, 72300; e-mail: vervik49@gmail.com.

Адоньев Евгений Александрович – кандидат технических наук, доцент, декан Экономико-гуманитарного факультета Запорожского национального университета в г. Мелитополе; ул. Героев Украины, 160А, г. Мелитополь, Украина, 72316, e-mail: evgen.adoniev@gmail.com.

Верещага Виктор Михайлович – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий Мелитопольського государственного педагогического университета им. Богдана Хмельницкого; ул. Гетьманская, 20, г. Мелитополь, Украина, 72300; e-mail: vervik49@gmail.com.

Adoniev Yevhen – PhD, associate professor, dean of the Economics and Humanities Faculty of the Zaporizhzhya National University in Melitopol. Heroiv Ukrainy str., 160A, Melitopol, Ukraine, 72316;e-mail: evgen.adoniev@gmail.com.

Vereshchaga Viktor – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies of the Melitopol State Pedagogical University named after Bohdan Khmelnytsky; Getmansky str., 20, Melitopol, Ukraine, 72300; e-mail: vervik49@gmail.com.