Володько Євгеній Григорович – магістр, Національна металургійна академія України, аспірант кафедри технології машинобудування; пр. Гагарина, 4, м. Дніпро, Україна, 49600; e-mail: yevhenii.volodko@gmail.com.

Негруб Светлана Леонидовна – кандидат технических наук, Национальная металлургическая академия Украины, доцент кафедры технологии машиностроения; пр. Гагарина, 4, г. Днепр, Украина, 49600.

Володько Евгений Григорьевич – магистр, Национальная металлургическая академия Украины, аспирант кафедры технологии машиностроения; пр. Гагарина, 4, г. Днепр, Украина, 49600; e-mail: yevhenii.volodko@gmail.com.

Nehrub Svitlana – PhD, National Metallurgical Academy of Ukraine, associate professor Department of Technology of Machine Building; Gagarin ave., 4, Dnipro, Ukraine, 49600; e-mail: negrub_svetlana@mail.ru.

Volodko Yevhenii – Master, National Metallurgical Academy of Ukraine, graduate student Department of Technology of Machine Building; Gagarin ave., 4, Dnipro, Ukraine, 49600; e-mail: yevhenii.volodko@gmail.com.

УДК 539.3

Д. Д. ИСМАЙЫЛОВА

ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Изучается задача кручения радиально-неоднородного изотропного полого цилиндра, когда боковые поверхности свободны от напряжений. Показано, что решение складывается из двух типов решений: проникающего решения и решения типа пограничного слоя.

Построены точные и асимптотическое решения задачи кручения цилиндра, когда упругие характеристики меняются по общим степенным законам, по радиусу. На основе проведенного анализа разъяснен характер напряженно-деформированного состояния цилиндра.

Ключевые слова: однородные решения, пограничный слой, решение Сен-Венана, краевой эффект.

Вивчається задача крутіння радіально-неоднорідного изотропного полого циліндра, коли бічні поверхні вільні від напружень. Показано, що рішення складається з двох типів рішень: проникаючого рішення і рішення типу прикордонного шару.

Побудовано точні і асимптотичні рішення задачі кручення циліндра, коли пружні характеристики змінюються за загальними статечним законам, по радіусу. На основі проведеного аналізу роз'яснено характер напружено-деформованого стану циліндра.

Ключові слова: однорідні рішення, прикордонний шар, рішення Сен-Венана, крайовий ефект.

The problem of torsion of a radially inhomogeneous isotropic hollow cylinder is studied, when the side surfaces are free from stresses. It is shown that the solution consists of two types of solutions: a penetrating solution and a solution of the boundary layer type.

Precise and asymptotic solutions of the torsion problem of the cylinder are constructed, when the elastic characteristics change according to general power laws, along the radius. Based on the analysis, the nature of the stress-strain state of the cylinder is explained.

Keywords: homogeneous solutions, boundary layer, Saint-Venant solution, edge effect.

Введение. В [1–3] разработана асимптотическая теория кручения для радиально-слоистых тел. Метод указанных работ был обобщен [4, 5] в задачах стационарных крутильных колебаний радиально-слоистого цилиндра.

В [6] методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости изучена задача кручения для радиально–неоднородного цилиндра малой толщины.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу кручения кругового радиально-неоднородного полого цилиндра. В цилиндрической системе координат область, занятая цилиндром обозначим через $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2],\ \phi \in [0; 2\pi],\ z \in [-L; L]\}$. Будем считать, что модуль сдвига $-G = G(r)$ произвольная строго положительная интегрируемая функция.

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил в цилиндрической системе координат r, ϕ, z имеют вид [7]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\phi} = 0\ , \tag{1}$$

где $\sigma_{r\phi}$, $\sigma_{\phi\xi}$ –компоненты тензора напряжений, которые выражаются через компоненты вектора перемещений следующим образом [7]:

$$\sigma_{r\phi} = G\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right),\ \sigma_{\phi z} = G\frac{\partial u_\phi}{\partial z}\,. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем уравнения равновесия в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[G(\rho)\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho}\right)\right] + \\ + \frac{2G(\rho)}{\rho}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho}\right) + G(\rho)\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \xi^2} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\rho = \dfrac{r}{R_0}$, $\xi = \dfrac{z}{R_0}$ – новые безразмерные переменные; $R_0 = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ – радиус срединной поверхности цилиндра; $u_\phi = u_\phi(\rho, \xi)$ – компонента вектора смещения;

$$\rho \in [\rho_1; \rho_2],\ \xi \in [-l; l]\left(\rho_s = \frac{r_s}{R_0},\ l = \frac{L}{r_0};\ s = 1, 2\right).$$

Предполагаем, что боковая часть цилиндра свободна от напряжений, т.е.

$$\sigma_{\rho\phi} = G(\rho)\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\rho} - \frac{u_\phi}{\rho}\right) = 0, \tag{4}$$

при

$$\rho = \rho_s \ \ (s = 1,2),$$

а на торцах заданы граничные условия

$$\sigma_{\phi\xi} = f^{\pm}(\rho) \quad \text{при } \xi = \pm l, \tag{5}$$

где $f^{\pm}(\rho)$ – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Решение задачи. Решение (3) будем искать в виде:

$$u_\phi(\rho,\xi) = \upsilon(\rho)\cdot m(\xi), \tag{6}$$

где функция $m(\xi)$ подчинена условию

$$m''(\xi) - \mu^2 m(\xi) = 0. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (3), (4), с учетом (7) получаем:

$$\left[G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right]' + \frac{2G(\rho)}{\rho}\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right) + \mu^2 G(\rho)\upsilon(\rho) = 0, \tag{8}$$

$$G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right) = 0$$

при $\rho = \rho_s, (s = 1,2)$. (9)

(8), (9) можно представить в следующем виде

$$A\upsilon = \mu^2\upsilon, \tag{10}$$

где

$$A\upsilon = \left\{-\frac{1}{G(\rho)}\left[G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right]' - \frac{2}{\rho}\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right);\right.$$

$$G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right) = 0$$

при $\rho = \rho_s; (s = 1;2)\}$.

Введем гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$(u,\upsilon) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho)\upsilon(\rho)u(\rho)\rho d\rho.$$

Лемма 1. Оператор $A: H \to H$ симметричен.

Доказательство: Для $\forall u(\rho), \upsilon(\rho) \in D_A$ имеем:

$$(A\upsilon,u) - (\upsilon,Au) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho)\cdot A\upsilon\cdot u(\rho)\cdot\rho d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho) Au\cdot\upsilon(\rho)\cdot\rho d\rho =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} (A\upsilon\cdot u - \upsilon Au)\cdot\rho G(\rho) d\rho =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left\{\left[-\frac{1}{G(\rho)}\left(G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right)' - \frac{2}{\rho}\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right]u(\rho) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{G(\rho)}\left(G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\right)' + \frac{2}{\rho}\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\right]\upsilon(\rho)\right\}\rho G(\rho) d\rho =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left\{-\left[G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right]'\rho u(\rho) - 2G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)u(\rho) + \right.$$

$$\left. + \left[G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\right]'\rho\upsilon(\rho) + 2G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\upsilon(\rho)\right\}d\rho =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\right]'\rho\upsilon(\rho)d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right]'\rho u(\rho)d\rho +$$

$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2G(\rho)\left(u'(\rho)\upsilon(\rho) - \upsilon'(\rho)u(\rho)\right)d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\upsilon(\rho)d\left(G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\right) -$$

$$- \int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\upsilon(\rho)d\left(G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right) + \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2G(\rho)\left(u'(\rho)\upsilon(\rho) - \upsilon'(\rho)u(\rho)\right)d\rho =$$

$$= G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\rho\upsilon(\rho)\Big|_{\rho_1}^{\rho_2} - \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho)\left(u'(\rho) - \frac{u(\rho)}{\rho}\right)d\left(\rho\upsilon(\rho)\right) -$$

$$- G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\rho u(\rho)\Big|_{\rho_1}^{\rho_2} + \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)d\left(\rho u(\rho)\right) +$$

$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2G(\rho)\left(u'(\rho)\upsilon(\rho) - \upsilon'(\rho)u(\rho)\right)d\rho =$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho)\left(-u'(\rho) + \frac{u(\rho)}{\rho}\right)\left(\upsilon(\rho) + \rho\upsilon'(\rho)\right)d\rho +$$

$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho)\left(\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\left(\rho u'(\rho) + u(\rho)\right)d\rho +$$

$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2G(\rho)\left(u'(\rho)\upsilon(\rho) - u(\rho)\upsilon'(\rho)\right)d\rho = 0,$$

т. е.

$$(A\upsilon,u) = (\upsilon,Au)$$

и оператор A – симметричен.

Все собственные значения $\lambda_k(A) = \mu_k^2$ – вещественные, а собственные функции удовлетворяют условию ортогональности [8]:

$$\left(\upsilon_s, \upsilon_t\right) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho) \upsilon_s(\rho) \upsilon_t(\rho) \rho d\rho = d_s \delta_{st}, \quad (11)$$

где

$$d_s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho) \upsilon_s^2(\rho) \rho d\rho .$$

$\mu^2 = 0$ –собственное значение оператора $A: H \to H$, и ему соответствует собственная функция $\upsilon_0(\rho) = \rho$.

Решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (4), можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_\phi(\rho, \xi) &= u_{\phi 0}(\rho, \xi) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon_k(\rho)\left(E_k e^{-\mu_k \xi} + B_k e^{\mu_k \xi}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $u_{\phi 0}(\rho, \xi) = E_0 \rho \xi$ –решение Сен-Венана; E_k, B_k – произвольные постоянные.

На основании (12) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\phi} &= \sum_{k=1}^{\infty} G(\rho)\left(\upsilon_k'(\rho) - \frac{\upsilon_k(\rho)}{\rho}\right) \times \\ &\times \left(E_k e^{-\mu_k \xi} + B_k e^{\mu_k \xi}\right); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\xi} &= E_0 \rho G(\rho) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} G(\rho) \mu_k \upsilon_k(\rho)\left(B_k e^{\mu_k \xi} - E_k e^{-\mu_k \xi}\right); \end{aligned} \quad (14)$$

Укажем характер построенных решений. Для крутящих моментов $M_{kp.}$ напряжений, действующих в сечении $\xi = const$, имеем:

$$M_{kp.} = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sigma_{\phi\xi} \rho^2 d\rho. \quad (15)$$

(14) подставим в (15):

$$\begin{aligned} M_{kp.} &= 2\pi E_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho) \rho^3 d\rho + \\ &+ 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 G(\rho) \upsilon_k(\rho) d\rho \right) \mu_k \left(B_k e^{\mu_k \xi} - E_k e^{-\mu_k \xi}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Умножим обе части (8) на ρ^2 и проинтегрируем полученное выражение в $[\rho_1; \rho_2]$:

$$\begin{aligned} &\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \left[G(\rho)\left(\upsilon_k'(\rho) - \frac{\upsilon_k(\rho)}{\rho}\right) \right]' d\rho + \\ &+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} 2G(\rho) \rho \left(\upsilon_k'(\rho) - \frac{\upsilon_k(\rho)}{\rho}\right) d\rho + \\ &+ \mu_k^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 G(\rho) \upsilon_k(\rho) d\rho = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

С помощью интегрирования по частям и с использованием (9) из (17) получим:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 G(\rho) \upsilon_k(\rho) d\rho = 0 . \quad (18)$$

Подставим (18) в (16):

$$M_{kp.} = 2\pi E_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho) \rho^3 d\rho. \quad (19)$$

Из (19) видно, что постоянная E_0 пропорциональна крутящим моментам $M_{kp.}$ напряжений, действующих в сечении $\xi = const$. Решение Сен-Венана определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние цилиндра. Напряженное состояние, соответствующее второй части решений (12), является самоуравновешенным в каждом сечении $\xi = const$ и имеет характер краевого эффекта, локализованного у торцов, что обосновывает принцип Сен-Венана.

Подставим (14) в граничные условия (5):

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} G(\rho) \mu_k \upsilon_k(\rho)\left(B_k e^{\mu_k \xi} - E_k e^{-\mu_k \xi}\right)\Big|_{\xi = \pm l} = \\ &= f_1^{\pm}(\rho), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$f_1^{\pm}(\rho) = f^{\pm}(\rho) - \frac{\rho G(\rho) M_{kp.}}{2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} G(\rho) \rho^3 d\rho} .$$

Умножая (20) на $\rho \upsilon_n(\rho)$ и интегрируя в переделах $[\rho_1, \rho_2]$, с учетом (11) имеем:

$$\begin{aligned} &\left(\mu_n e^{\mu_n \xi} B_n - \mu_n e^{-\mu_n \xi} E_n\right)\Big|_{\xi = \pm l} = \\ &= \frac{1}{d_n} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho f_1^{\pm}(\rho) \upsilon_n(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (21)$$

После решения системы (21) определим неизвестные постоянные B_n и E_n:

$$B_n = \frac{t_n^+ e^{\mu_n l} - t_n^- e^{-\mu_n l}}{2\mu_n sh(2\mu_n l)},\; E_n = \frac{t_n^+ e^{-\mu_n l} - t_n^- e^{\mu_n l}}{2\mu_n sh(2\mu_n l)}.$$

Допустим у цилиндра модуль сдвига задан в виде функции

$$G(\rho) = g_0 \rho^n, \tag{22}$$

где n – произвольное положительное число, g_0 – постоянная.

С учетом (22) из (8), (9) имеем:

$$\upsilon''(\rho) + \frac{(n+1)}{\rho}\upsilon'(\rho) + \left(\mu^2 - \frac{(n+1)}{\rho^2}\right)\upsilon(\rho) = 0, \tag{23}$$

$$\upsilon'(\rho) - \frac{\upsilon(\rho)}{\rho} = 0 \text{ при } \rho = \rho_s. \quad (s = 1;2) \tag{24}$$

Общее решение (23) имеет вид:

$$\upsilon(\rho) = \rho^{-\frac{n}{2}}\left(CJ_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho) + DY_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)\right) \tag{25}$$

где $J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)$, $Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)$ – функции Бесселя первого и второго родов, соответственно; C, D – произвольные постоянные.

С помощью (25), удовлетворяя граничным условиям (24), относительно C, D получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\left(\mu\rho J'_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho) - \left(1+\frac{n}{2}\right)J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)\right)C +$$
$$+\left(\mu\rho Y'_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho) - \left(1+\frac{n}{2}\right)Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)\right)D = 0$$

при $\rho = \rho_s$. (26)

$(s = 1;2)$.

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение:

$$\Delta(\mu, \rho_1, \rho_2) = \mu^2 \rho_1 \rho_2 L^{(1,1)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu) - \mu\left(1+\frac{n}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\rho_1 L^{(1,0)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu) + \rho_2 L^{(0,1)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu)\right) +$$
$$+\left(1+\frac{n}{2}\right)^2 L^{(0,0)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu) = 0, \tag{27}$$

где

$$L^{(i,j)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu) = J^{(i)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1)Y^{(j)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_2) -$$
$$-J^{(j)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_2)Y^{(i)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1);\; (i, j = 0;1).$$

Трансцендентное уравнение (27) определяет счетное множество μ_k, а соответствующие им постоянные C_k, D_k пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов какой-либо строки определителя системы (26). Для C_k, D_k имеем:

$$C_k = \left[\mu_k \rho_2 Y'_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho_2) - \left(1+\frac{n}{2}\right)Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho_2)\right],$$

$$D_k = -\left[\mu_k \rho_2 J'_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho_2) - \left(1+\frac{n}{2}\right)J_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho_2)\right]. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (25) и суммируя по всем корням, получаем:

$$u_\phi(\rho,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\rho^{-\frac{n}{2}}\left[\mu_k\rho_2 L^{(0,1)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2) -\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{n}{2}\right)L^{(0,0)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2)\right]m_k(\xi), \tag{29}$$

где

$$m_k(\xi) = E_k e^{-\mu_k\xi} + B_k e^{\mu_k\xi}\;;$$

$$L^{(i,j)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho,\ \mu\rho_2) = J^{(i)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)Y^{(j)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_2) -$$
$$-J^{(j)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_2)Y^{(i)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho);\;(i, j = 0;1).$$

Для компонент тензора напряжений имеем:

$$\sigma_{\rho\phi} = \sum_{k=1}^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}-1}\left[\mu_k^2\rho\rho_2 L^{(1,1)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2) -\right.$$
$$-\mu_k^2\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\rho L^{(1,0)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2) - \rho_2 L^{(0,1)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2)\right) +$$
$$\left.+\left(1+\frac{n}{2}\right)^2 L^{(0,0)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2)\right]m_k(\xi), \tag{30}$$

$$\sigma_{\rho\xi} = \sum_{k=1}^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}}\left[\mu_k\rho_2 L^{(0,1)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2) -\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{n}{2}\right)L^{(0,0)}_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k\rho;\mu_k\rho_2)\right]m'_k(\xi).$$

Допустим цилиндр имеет малую толщину. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи.

Положим

$$\rho_1 = 1-\varepsilon,\ \rho_2 = 1+\varepsilon, \tag{31}$$

где $\varepsilon = \dfrac{r_2 - r_1}{2R_0}$ – малый параметр, характеризующий толщину цилиндра.

Подставляя (31) в (27), получаем:

$$\Delta(\mu,\rho_1,\rho_2) = \Delta(\mu,\varepsilon) = 0.$$

Лемма 2. Нули $\Lambda(\mu)$ функции $\Delta(\mu,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ являются счетным множеством и представляются в виде

$$\Lambda(\mu) = \Lambda_1(\mu)\bigcup\Lambda_2(\mu)$$

1) $\Lambda_1(\mu)$ состоит из двукратного нуля $\mu = 0$,

2) $\Lambda_2(\mu)$ состоит из счетного множества нулей $\mu_k = \dfrac{\pi k}{2\varepsilon} + O(\varepsilon)$.

Доказательство: Представим $\Delta(\mu,\varepsilon)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\mu,\varepsilon) = \\
&= \frac{4}{\pi}\mu^2\left\{1+\left[-\frac{2}{3}\mu^2+\frac{2}{3}\left(1+\frac{n}{2}\right)^2+\frac{4}{3}\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]\varepsilon^2+\right. \\
&+\left[\frac{2}{15}\mu^4+\left(\frac{2}{15}-\frac{4}{15}\left(1+\frac{n}{2}\right)^2-\frac{8}{15}\left(1+\frac{n}{2}\right)\right)\mu^2+\right. \\
&+\frac{2}{15}\left(1+\frac{n}{2}\right)^4+\frac{8}{15}\left(1+\frac{n}{2}\right)^3+ \\
&\left.\left.+\frac{4}{5}\left(1+\frac{n}{2}\right)^2+\frac{8}{15}\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]\varepsilon^4+\ldots\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Отметим что,

$$\Delta(\mu,\varepsilon) = \mu^2\Delta_0(\mu,\varepsilon)$$

где $\lim\limits_{\mu\to 0}\Delta_0(\mu,\varepsilon) \neq 0.$

Таким образом, получаем, что $\mu = 0$ является двукратным нулем $\Delta(\mu,\varepsilon)$. Покажем, что все нули $\Delta_0(\mu,\varepsilon)$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \to 0$. Предположим обратное. Допустим $\mu_k \to \mu_k^*$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_0(\mu_k,\varepsilon) \neq \Delta_*(\mu_k^*).$$

Предельные точки множества нулей μ_k при $\varepsilon \to 0$ определяются из уравнения

$$\Delta_*(\mu_k^*) = \frac{4}{\pi} = 0.$$

Полученное противоречие утверждает что, предположение о существовании ограниченных нулей при $\varepsilon \to 0$ невозможно, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_k = \infty$.

При $\varepsilon \to 0$ возможны следующие случаи:

1[0]) $\varepsilon\mu_k \to 0$;

2[0]) $\varepsilon\mu_k \to const$;

3[0]) $\varepsilon\mu_k \to \infty$.

Аналогично методу [9] можно показать что случаи 1[0]) и 3[0]) здесь невозможны. Для построения асимптотики нулей группы 2[0]) отыскиваем их в виде:

$$\mu_k = \frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \tag{33}$$

Подставляя (33) в (27) и учитывая асимптотические разложения функций

$$J_{1+\frac{n}{2}}(\mu),\ Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu)$$

при больших значениях аргумента [10], для δ_k получаем:

$$\sin 2\delta_k = 0, \quad \text{т. е. } \delta_k = \frac{\pi k}{2}.$$

Перемещение и напряжения, соответствующие корню $\mu^2 = 0$ определяются формулами

$$u_\phi^{(1)}(\rho,\xi) = E_0\rho\xi;\ \sigma_{\phi\xi}^{(1)} = E_0\rho^{n+1};\ \ \sigma_{\rho\phi}^{(1)} = 0. \tag{34}$$

Полагая $\rho = 1+\varepsilon\eta(-1\le\eta\le 1)$, решения, соответствующие множеству нулей $\Lambda_2(\mu)$, можно представить в виде:

$$u_\phi^{(2)}(\rho,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_k\cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)\right]m_k(\xi),$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(2)} = \frac{g_0}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_k^2\sin(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)\right]m_k(\xi), \tag{35}$$

$$\sigma_{\phi\xi}^{(2)} = g_0\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_k\cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)\right]m_k'(\xi).$$

Для перемещения и напряжений имеем:

$$u_\phi(\rho,\xi) = u_\phi^{(1)}(\rho,\xi) + u_\phi^{(2)}(\rho,\xi),$$

$$\sigma_{\rho\phi} = \sigma_{\rho\phi}^{(2)},\ \sigma_{\phi\xi} = \sigma_{\phi\xi}^{(1)} + \sigma_{\phi\xi}^{(2)}.$$

Формулы (34) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние цилиндра. Напряженное состояние, определяемое формулами (35), имеет характер пограничного слоя и первые члены его асимптотического разложения эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана в теории неоднородных плит [2, 3, 6].

Выводы. Решение задачи кручения радиально-неоднородного цилиндра, когда боковые поверхности свободны от напряжений состоит из проникающих решений, которые определяются через крутящие моменты касательных напряжений, приложенных к сечению $\xi=const$ и из погранслоев, локализованных у торцов цилиндра.

Список литературы:

1. *Ахмедов, Н. К.* О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра [Текст] / *Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов* // Прикладная математика и механика. – 1988. – Т. 52, № 2. – С. 264–268.
2. *Ахмедов, Н. К.* Некоторые задачи теории упругости для сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек [Текст] / *Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов* // Актуальные аспекты физико-механических исследований. – 2007. – С. 48–61.
3. *Ахмедов, Н. К.* Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки [Текст] / *Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов* // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 416–426.
4. *Ахмедов, Н. К.* Крутильные колебания и волны в слоистом цилиндре [Текст] / *Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов* // Известия АН СССР, Механика твердого тела. – 1991. – № 2. – С. 92 – 98.
5. *Ахмедов Н. К.* Распространение крутильных волн в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе [Текст] / *Н. К. Ахмедов* // Известия РАН, Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 114–123.
6. Akhmedov N.K. Asymptotic analysis of torsion problem for a radially-inhomgeneous cylinder of small thickness [Text] / N. K. Akhmedov // Transactions of NAS of Azerbaijan. – 2006. – Vol. 1, № XXVI. – P. 193–197.
7. *Лурье, А. И.* Теория упругости [Текст] / *А. И. Лурье.* – М.: Наука, 1970. – 939 с.
8. *Михлин, С. Г.* Линейные уравнения в частных производных [Текст] / *С. Г. Михлин.* – М.: Высшая школа, 1977. – 423 с.
9. *Мехтиев, М. Ф.* Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел [Текст] / *М. Ф. Мехтиев.* – Баку: НАН Азербайджана, 2008. – 320 с.
10. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Том 1 [Текст] / *Г. Бейтмен, А. Эрдейн.* – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Bibliography (transliterated):

1. Ahmedov, N. K., Ustinov, Ju. A. (1988). O principe Sen-Venana v zadache kruchenija sloistogo cilindra. Prikladnaja matematika i mehanika, 52 (2), 264–268.
2. Ahmedov, N. K. Ustinov, Ju. A. (2007). Nekotorye zadachi teorii uprugosti dlja sil'no neodnorodnyh sloistyh plastin i obolochek. Aktual'nye aspekty fiziko-mehanicheskih issledovanij, 48–61.
3. Ahmedov, N. K. Ustinov, Ju. A. (2009). Analiz struktury pogranichnogo sloja v zadache kruchenija sloistoj sfericheskoj obolochki. Prikladnaja matematika i mehanika, 73 (3), 416–426.
4. Ahmedov, N. K., Ustinov, Ju. A. (1991).Krutil'nye kolebanija i volny v sloistom cilindre. Izvestija AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, 2, 92 – 98.
5. Ahmedov N. K. (2008). Rasprostranenie krutil'nyh voln v radial'no-sloistom cilindricheskom volnovode. Izvestija RAN, Mehanika tverdogo tela, 2, 114–123.
6. Akhmedov, N. K. (2006). Asymptotic analysis of torsion problem for a radially-inhomgeneous cylinder of small thickness. Transactions of NAS of Azerbaijan, 1 (XXVI), 193–197.
7. Lur'e, A. I. (1970). Teorija uprugosti. Moscow: Nauka, 939.
8. Mihlin, S. G. (1977). Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh, Moscow: Vysshaja shkola, 423.
9. Mehtiev, M. F. (2008). Asimptoticheskij analiz nekotoryh prostranstvennyh zadach teorii uprugosti dlja polyh tel. Baku: NAN Azerbajdzhana, 320.
10. Bejtmen, G., Jerdejn, A. (1973). Vysshie transcendentnye funkcii. Tom 1. Moscow: Nauka, 294.

Поступила (received) 06.04.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Завдання крутіння радіально-неоднорідного циліндра/ Д. Д. Ісмайілова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – No 16(1238). – С.82–87. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Задача кручения радиально-неоднородного цилиндра/ Д. Д. Исмайылова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – No 16(1238). – С.82–87.. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

The problem of torsion of a radially inhomogeneous cylinder/ J. J. Ismayilova //Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU "KhPI", 2017. – № 16 (1238).– P.82 –87. – Bibliogr.: 10. – ISSN 2079-5459

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ісмайилова Джалала Джамшид кизи – аспірант, Гянджінський Державний Університет, кафедра «Загальні технічні дисципліни і технологія»; вул. Гейдар Алієв, 187, м Гянджа, Азербайджан, AZ 2000; e-mail: celaleismayilova@gmail.com.

Исмайылова Джалала Джамшид кызы **–** аспирант, Гянджинский Государственный Университет, кафедра «Общие технические дисциплины и технология»; ул. Гейдар Алиев, 187, г. Гянджа, Азербайджан, AZ 2000; e-mail:celaleismayilova@gmail.com.

Ismayilova Jalala Jamshid gizi – Postgraduate Student, Ganja State University, department of "General technical disciplines and technology", str. Heydar Aliyev, Ganja, Azerbaijan, AZ 2000; e-mail: celaleismayilova@gmail.com.